ΘΕΩΡΗΜΑ GAUSS:

Ενα κανονικό n-γωνο είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη $\Leftrightarrow$ οι περιττοί διαιρέτες του n είναι διακεκριμένοι πρώτοι τύπου Fermat $2^{2^k}+1$

$\mathbb{R}^n$ δx διάσταση n
Μετρικός
Τοπολογικός ($\mathcal{T}$ όλοι οι τοπολογικοί χώροι)
ώστε $\mathcal{T} \supseteq$ Μετρικοί χώροι $\supseteq$ Μετρικούς Διανυσματικούς Χώρους

Βασικές περιοχές σε ένα σημείο $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$
$B_\varepsilon(\bar{x})^\circ = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n / d(\bar{x},\bar{y}) < \varepsilon\}$, $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_n-y_n)^2}$

V δx με εσωτερικό γινόμενο
$\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$
διγραμμικός: 1) $\langle \bar{x}+\bar{y}, \bar{z} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$
$\langle \bar{x}, \bar{y}+\bar{z} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle$
2) $\langle c\bar{x}, \bar{y} \rangle = |c| \cdot \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$
3) $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$
4) $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \geq 0$ και $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Η νόρμα στον V δx ορίζεται
$\|\bar{x}\| = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} \Longrightarrow d(x,y)$
Κανονικό εσωτερικό γινόμενο
$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟΝ V $\Longleftrightarrow$ ΟΜΑΔΩΝ ΙΣΟΜΕΤΡΙΩΝ

$\mathcal{T} \ni X$, $Hom(X) = \{$ ομοιομορφισμοι $X \to X\}$
Διαφορίσιμες πολλ/τες: $Diff\, X = \{$ διαφορομορφ. $X \to X\}$

Πχ
$M(n \times n, \mathbb{R})$ $\dim$ n^2 διαστασης $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^2$ εσωτ. γινομενο
$\Leftrightarrow$ κανονικό εσωτερικό γινόμενο $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \langle A, B\rangle = tr(A \cdot B^t)$ αρα ο $M(n \times n, \mathbb{R})$ έχει γεωμετρία

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν $(X, \mathcal{T})$ είναι τ.χ και $A \subseteq X$ τοτε ορίζεται η επαγόμενη τοπολογία στον $(A, \mathcal{T}_A)$

Πχ
$GL(2,\mathbb{R}) \subseteq M(2\times 2, \mathbb{R})$ αλλά $GL(2,\mathbb{R}) \nleq M(2\times 2,\mathbb{R})$
αφου $0 \notin GL(2,\mathbb{R})$ αλλα είναι τοπολογικός χώρος και ομαδα. Και το γινόμενο της ομάδας είναι συνεχής σύμφωνα με αυτή την τοπολογία
Το $GL(n,\mathbb{R})$ παράδειγμα τοπολογικής ομάδας

Τι άλλο μας ενδιαφέρει να γνωρίζαμε:
Συνεκτικότητα;
Συμπάγεια;
Πληρότητα;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:
- Ο χώρος $\mathbb{R}$ σώμα
ως προς $+$ αβελιανή
ως προς $\cdot$ αβελιανή αν $\mathbb{R}^*$

• Ο χώρος $\mathbb{R}^2$

$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$

$(x,y)\cdot(x',y')=(x\cdot x',y\cdot y')$

πχ $\longrightarrow$ $(1,0)\cdot(0,1)=(0,0)$ δεν είναι σώμα το $\mathbb{R}^2$

Μπορούμε όμως να βρούμε πράξεις για να γίνει σώμα

Έτσι ορίζουμε:

$(x,y)\odot(x',y')=(xx'-yy', xy'+x'y)$

Έτσι $\mathbb{R}^2$ σώμα $x^2+y^2\neq 0 \Rightarrow (x,y)^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$

$\mathbb{R}^2 \geq \mathbb{R}$

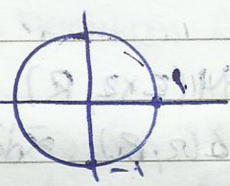
Στοιχεία πεπερασμένης τάξης στο $\mathbb{R}^*$

Ζητάω $|x|^n=1 \Rightarrow |x|=1 \to x=\pm 1$

ord$(1)=1$

ord$(-1)=2$

Στο $\mathbb{C}$ τάξης n



$x^n=1$, $x\in\mathbb{C}$

$|x|=1$ Έτσι $\forall n\geq 1$ έχουμε ακριβώς n τέτοια στοιχεία

Για την $\mathbb{C}^*$

$\langle i\rangle=\{i,i^2,i^3,i^4,\dots\}=\{\pm 1,\pm i\}$

• Ο χώρος $\mathbb{R}^3$ μπορεί να γίνει σώμα;

$\mathbb{R}^3=\langle 1,i,j\rangle$ με $j\notin\mathbb{C}$

Έστω ότι είναι σώμα, έτσι $i,j\in\mathbb{R}^3 \Rightarrow ij=a1+bi+\gamma j$ ⊛

άρα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός

πολ/ζουμε με i:

$i^2 j=\alpha i+b i^2+\gamma ij \Rightarrow -j=\alpha i-b+\gamma ij$

Άρα ⊛ είναι: $-j=\alpha i-b+\gamma a 1+\gamma b i+\gamma^2 j \Rightarrow$

$\Rightarrow 0=(a\gamma-b)1+(\alpha+\gamma b)i+(\gamma^2+1)j \Rightarrow \gamma^2+1=0$, $\gamma\in\mathbb{R}$ άτοπο

Άρα, δεν μπορεί το $\mathbb{R}^3$ να γίνει σώμα

- Στον $\mathbb{R}^4$. Είναι ο $\mathbb{R}^4$ σώμα;

το $\mathbb{R}^4 = < 1, i, j, k >$

Θα πρέπει οι πράξεις από το $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ να κληρονομούνται από το $\mathbb{R}^4$.

$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ όχι αβελιανή

όχι κυκλική

$i^4 = j^4 = k^4 = 1$

$ij = k, ji = -k$

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	-j	i	-1

βάσει αυτών των πράξεων το $\mathbb{R}^4$ όχι σώμα διότι όχι αβελιανή ως προς το γινόμενο

Κάθε μη-μηδενικό $\alpha 1 + \beta i + \gamma j + \delta k$ με $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 \neq 0$ έχει αντίστροφο το $\dfrac{\alpha - \beta i - \gamma i - \delta k}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}$

το $\mathbb{R}^4$ με αυτές τις πράξεις είναι διαιρετικός δακτύλιος (δεν έχει αντιμεταθετική ιδιότητα) συμβολίζεται $\mathbb{H}$ και διαβάζεται τετραρτόνια.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μία πραγματική άλγεβρα Α είναι ένας πραγματικός δ.χ εφοδιασμένος με γινόμενο $A \times A \to A$

Και διαιρετική πραγματική άλγεβρα $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{0} \Rightarrow \bar{x} = 0 \vee \bar{y} = 0$

ή $\forall\, x \neq \bar{0} \Rightarrow \exists\, x^{-1}$

π.χ

$M(n \times n, \mathbb{R})$ είναι πραγματική άλγεβρα

Αν η διαιρετική άλγεβρα είναι αντιμεταθετική, τότε είναι σώμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Να ταξινομηθούν οι πραγματικές διαιρετικές άλγεβρες

Frobenius - Zorn: Αν είναι προσεταιριστικές
$\{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$

1960 Adams: Οι πραγματικές διαιρετικές άλγεβρες είναι $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{K}$ (Caley numbers)

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ σώματα
$\mathbb{H}$ όχι αντιμεταθετικό
$\mathbb{K}$ δεν είναι αντιμεταθετικό

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{R}, & \mathbb{C}, & \mathbb{H}, & \mathbb{K} \\ 2^{0}, & 2^{1}, & 2^{2}, & 2^{3} \end{array}$$

Bott - Milnor:
$\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$ αντιμεταθ. ομάδ.
$\mathbb{H}^*$ ομάδα
$\mathbb{K}^*$ όχι ομάδα

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ:

$\Sigma_\nu = \{ f: \{1,2,\ldots,n\} \xrightarrow[\text{επι}]{1-1} \{1,2,\ldots,n\} \}$

Σ_ν με τη συνθεση

Σ_3 ισομετρίες ισοπλευρου τριγώνου

D_4 " " τετραγώνου

$D_4 < \Sigma_4$
$D_4 < \Sigma_4$

πχ

$n=4$ εστω $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$g \cdot f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Οταν ένα στοιχείο δεν φαίνεται σημαίνει χαριν συντομίας ότι πάει στον εαυτό του

Ετσι, $f=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (2,4,3)$ κυκλος

και $g=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1,2)(3,4)$ γινομενο κυκλων ξενων μεταξύ τους

οπου, είναι αντιμεταθετική

$(1,2)(3,4) = (3,4)(1,2)$ αυτό <u>μόνο</u> αν είναι ξένοι

ΠΧ

$(1,2,5)\cdot(3,4,5) =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 5 & 4 & \cancel{5} & 3 \end{pmatrix}$ Δεν μπορούμε να έχουμε δύο φορές το 5 διότι τα στοιχεία ορίζονται μοναδικά

$= (1,2,5,3,4)$ δύο αναπαραστάσεις

ΟΡΙΣΜΟΣ:
Έστω $1 \leq k \leq n$ και $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$
Ο k-κύκλος $(x_1, \ldots, x_k)$ είναι η μετάθεση
$x_i \longrightarrow x_{(i+1) \bmod k}$ και $a \to a$ για $a \notin \{x_1, \ldots, x_k\}$
$x_k \longrightarrow x_{(k+1) \bmod k = 1 \bmod k}$
Παρατήρηση: $(x_1, \ldots, x_k) \neq (x_2, x_1, \ldots, x_k)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο κύκλοι είναι ξένοι αν
$\{x_1, \ldots, x_k\} \cap \{y_1, \ldots, y_l\} = \emptyset$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Για κάθε μετάθεση $f \in \Sigma_n$ υπάρχουν κύκλοι ξένοι μεταξύ τους ώστε $f = a_k \cdots a_2 a_1$ (κάθε κύκλο $\{a_1, \ldots, a_k\}$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Εξετάζουμε αν $f(1) \neq 1$
Εάν $f(1) = 1$ δεν λαμβάνεται υπόψη
Ας είναι $f(1) = x_1 \neq 1$
Εξετάζουμε εάν $f(x_1) = x_1$, τότε έχουμε $1, x_1$ και τότε $f(1) = f(x_1)$ και δεν μπορεί να είναι ο κύκλος
Άρα, $f(x_1) \neq x_1$
Αυτό ισχύει για τα στοιχεία τα οποία η f δεν τα αφήνει αναλλοίωτα

Θα μελετήσουμε μόνο αυτά τα οποία δεν μένουν αναλλοίωτα
$f(x_1)=x_2,\ f(x_2)=f(x_3),\ \dots,\ f(x_k)=1$
Τώρα ορίζεται κύκλος $(1,x_1,\dots,x_k)$
Ας είναι A το σύνολο το οποίο:
$A=\{1,2,\dots,n\}-\{\text{αναλλοίωτα}\}$.
Έστω $y_1\in A-\{1,x_1,\dots,x_k\}$ και ακολουθούμε την ίδια διαδικασία $y_1\to f(y_1)=y_2,\ y_2\to f(y_2)=y_3\to\dots\to$
$\to f(y_m)=y_1$ κύκλος $(y_1,y_2,\dots,y_m)$
Έστω $z_1\in A-\{1,x,\dots,x_k\}-\{y_1,\dots,y_m\}$ και συνεχίζουμε όμοια. Έτσι μετά από πεπερασμένα βήματα θα έχουμε τους ζητούμενους κύκλους
Άρα, $f=(w_1,\dots,w_t)\dots(y_1,\dots,y_m)(x_1,\dots,x_k)$

Πχ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & \boxed{3} & 1 & 2 & 8 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Αναλλοίωτα

$1\to4\to1$: $(1,4)$
$2\to5\to2$: $(2,5)$
$6\to8\to6$: $(6,8)$
$7\to9\to7$: $(7,9)$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Κύκλοι ξένοι μεταξύ τους αντιμετατίθενται

Απόδειξη:
Θέλω ν.δ.ο $f=(x_1,\dots,x_k)\underbrace{(y_1,\dots,y_m)=(y_1,\dots,y_m)}_{\text{στέλνουν το ίδιο στοιχείο στην ίδια εικόνα}}(x_1,\dots,x_k)=g$

$z\notin\{x_1,\dots,x_k\}\cup\{y_1,\dots,y_m\}\Rightarrow f(z)=z=g(z)$
$x_i\to f(x_i)=x_{(i+1)\bmod k}=g(x_i)$
$y_j\to f(y_j)=y_{(j+1)\bmod m}=g(y_j)$
Άρα, $f=g$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια αντιμετάθεση είναι ένας κύκλος μήκους 2
Δηλ. (x_1, x_2)

ΠΟΡΙΣΜΑ: Κύκλος μήκους k έχει τάξη k

ΠΟΡΙΣΜΑ: Ένας κύκλος μήκους k γράφεται σαν γινόμενο αντιμεταθέσεων με πολλούς τρόπους

Απόδειξη:

$(x_1, \dots, x_k) = (x_1, x_k) \cdots (x_1, x_3) \cdot (x_1, x_2)$

$x_1 \to x_2$	$x_1 \to x_2$
$x_2 \to x_3$	$x_2 \to x_1 \to x_3$
$x_3 \to x_4$	$x_3 \to x_1 \to x_4$
$\vdots$	$\vdots$
$x_k \to x_1$	$x_k \to x_1$

Πχ $(1,3,7) = (1,7)(1,3) \overset{\text{ΝΔΟ}}{=} (4,7) \cdot (1,7)(1,4)(1,3)$

Λύση

$1 \to 3$	$1 \to 3$
$3 \to 7$	$3 \to 1 \to 4 \to 7$
$7 \to 1$	$4 \to 1 \to 7 \to 4$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια μετάθεση καλείται άρτια, αν γράφεται σαν άρτιο πλήθος αντιμεταθέσεων. Διαφορετικά περιττή

ΘΕΩΡΗΜΑ/ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $f \in \Sigma_\nu$, $\nu > 1$. Η f θα είναι αποκλειστικά άρτια ή περιττή. Δηλαδή αν γράφεται σε άρτιο πλήθος αντιμεταθέσεων δεν μπορεί να γραφεί με άλλο τρόπο με περιττό πλήθος αντιμεταθέσεων

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το σύνολο όλων των άρτιων μεταθέσεων καλείται εναλλάσσουσα υποομάδα της Σ_ν με συμβολισμό ως A_ν. (Αποτελεί υποομάδα)

Επίσης, $A_\nu \leq \Sigma_\nu \Rightarrow |A_\nu| = \frac{|\Sigma_\nu|}{2}$

Διότι πχ.

Έστω $A_\nu = \{a_1, \dots, a_k\}$ άρτιες τυχαία αντιμετάθεση $(1,2)=a$

$(1,2) A_\nu = (1,2) \cdot \{a_1, \dots, a_k\} = \{(1,2) a_1, \dots, (1,2) a_k\} \Rightarrow a \cdot a_i = a \cdot a_j$

Μια περιττή f γράφεται άρτια α $f \in A_\nu \Rightarrow a \cdot a f = f$ δίνεται

Άρα το πλήθος των αρτίων = πλήθος των περιττών